7ο Μάθημα

15/11/21 ①

Γενική Γραμμική Υπόθεση - Αξίωμα extra Αθροίσματος Τετραγ.

$\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$, με $\underset{\sim}{\varepsilon} \sim N_n(\underset{\sim}{0}, \sigma^2 I_n)$

Γενική Γραμμική Υπόθεση

H_0 : $A \cdot \underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{c}$, όπου A είναι $q \times (p+1)$-πίνακας με $q = rank(A)$ και $\underset{\sim}{c}$ ένα διάνυσμα $p \times 1$.

Εφαρμογές της Ho

(i) Αν $A = I_{p+1}$ και $\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0}$, τότε $H_0 : \underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{0}$.
(Σπουδαία, γιατί αν δεν μπορώ να την απορρίψω, δεν υφίσταται το μοντέλο)

(ii) Αν $A = I_{p+1}$, $\underset{\sim}{c} = \beta^*$, με β^* γνωστό, τότε $H_0 : \underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{\beta}^*$. (Δίνει τη δυνατότητα να ελέγξω ότι τα β_i έχουν συγκεκριμένη τιμή β_i^*, δίνει τη δυνατότητα να αποφανθώ αν η Y μεταβάλλεται κατά β_i^* σε μοναδιαία μεταβολή της X_i, όταν οι υπόλοιπες X_i θεωρηθούν)

iii) Αν ο A είναι διαγώνιος συγκεκριμένης μορφής και $\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0}$, τότε η Ho γίνεται Ho: $\underset{\sim}{b}(m) = \underset{\sim}{0}$ όπου $\underset{\sim}{b}(m)$ ένα διάνυσμα το οποίο έχει για συνιστώσες κάποια από τα b_i, $i = 0, 1, \dots, p$
(Δίνει τη δυνατότητα να ελέγξω ότι κάποια από τα b_i είναι 0, οπότε να ελέγξω αν η Y εξαρτάται από τα αντίστοιχα X_i).

Π.χ. Αν $A = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ και $\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0}$, τότε

η Ho: $A \cdot \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{c} \Leftrightarrow$ Ho: $\underset{\sim}{b}(2) = \underset{\sim}{0}$, όπου

$\underset{\sim}{b}(2) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ Ho: $b_1 = b_2 = 0$.

Βήματα Κατασκευής Τεστ

- Θεωρώ το πλήρες μοντέλο (Π.Μ) της π.γ.π.
$Y_i = b_0 + b_1 X_{i1} + b_2 X_{i2} + \dots + b_p X_{ip} + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$
- Ορίζω ως Ho-μοντέλο (HoM) το μοντέλο που προκύπτει από το ΠΜ αν λάβω υπόψιν την Ho: $A \cdot \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{c}$

Παράδειγμα:

Έστω Ho: $A \cdot \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{c}$ για $A = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

τότε Ho: $\underset{\sim}{b}(2) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Αν λάβω υπόψιν την $b(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ το ΠΜ γίνεται
$Y_i = b_0 + b_3 X_{i3} + b_4 X_{i4} + \dots + b_p X_{ip} + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$ (HoM)

• Έχοντας το ΠΜ και το HoM υπολογίζαμε τους Ε.Ε.Τ. της $\underset{\sim}{b}$ και έστω ότι είναι $\hat{\underset{\sim}{b}}$ και $\hat{\underset{\sim}{b}}_{Ho}$ και έστω $\hat{\underset{\sim}{y}}$ και $\hat{\underset{\sim}{y}}_{Ho}$ οι προβλεπόμενες τιμές της $\underset{\sim}{y}$ στο ΠΜ και το HoM αντίστοιχα. Έστω τα αντίστοιχα αθροίσματα τετραγώνων στα υπόλοιπα.

$$SSres(\Pi.M) \overset{\text{ορ}}{=} (\underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{y}})' \cdot (\underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{y}})$$

$$SSres(HoM) \overset{\text{ορ}}{=} (\underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{y}}_{Ho})'(\underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{y}}_{Ho})$$

Αν $SSres(HoM) >> SSres(\Pi M)$, αυτό σημαίνει ότι το HoM δεν εκφράζει μεγάλο μέρος από τη μεταβλητότητα της $\underset{\sim}{y}$, άρα πρέπει να απορριφθεί. Επομένως ένα τεστ μπορεί να στηριχτεί στη σύγκριση των SSres(HoM) και SSres(ΠΜ) ή στη διαφορά

$\boxed{SSres(HoM) - SSres(\Pi M)}$

Πρόταση:

Ισχύει ότι: $SSres(HoM) - SSres(\Pi M) = (A\hat{\underset{\sim}{b}} - \underset{\sim}{c})' \cdot [A(X'X)^{-1}A']^{-1}(A\hat{\underset{\sim}{b}} - \underset{\sim}{c})$

Πρόταση:

Δεν γνωρίζω την σ^2 άρα διαιρώ και έχω F κατανομή

$$\frac{SSres(HoM) - SSres(\Pi M)}{\sigma^2} \sim X^2_q \quad (q = \text{αριθμός γραμμών του } A)$$

υπό την Ho.

• Επομένως, γνωρίζω $\frac{SSres(\Pi M)}{\sigma^2} \sim X^2_{n-p-1}$ και

MSres ανεξάρτητη από $\hat{\underset{\sim}{b}}$.

Επομένως το SSres(ΠΜ) ανεξ. από SSres(HoM) − SSres(ΠΜ) ως συνάρτηση της $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$.

Θεωρώ τη ΣΣΤ $F = \dfrac{SSres(HM) - SSres(ΠΜ) / q}{SSres(ΠΜ) / n-p-1} \sim F_{q, n-p-1}$

υπό την Ho.

Εύρεση Κρίσιμης Περιοχής:

κ.π. = μεγάλες τιμές της διαφοράς των αθρ. τετρ = μεγάλες τιμές του F.

Έστω $F \geq c$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Υπολογ. το } c}$

$a = P$ (απορ. Ho | Ho αληθής) =
$= P(F \geq c \mid F \sim F_{q,n-p-1}) = P(F_{q,n-p-1} \geq c)$
$\Downarrow$
$c = F_{q,n-p-1,a}$

Άρα για τον έλεγχο της Ho: $A\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{c}$, η ΣΣΤ είναι:

$$F = \frac{(n-p-1)(A\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{c})' [A(X'X)^{-1}A']^{-1} (A\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{c})}{q \cdot SSres(ΠΜ)}$$

με κατανομή $F_{q,n-p-1}$ υπό Ho και κ.π. $F \geq F_{q,n-p-1,a}$

Ανάλυση Υπολοίπων:

ΓΓΜ: $\underset{\sim}{Y} = X \cdot \underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$. Υποθέσεις: $\underset{\sim}{\varepsilon} \sim N_n(\underset{\sim}{0}, \sigma^2 \cdot I_n) \rightarrow$

$\rightarrow \underset{\sim}{Y} \sim N_n(X\underset{\sim}{\beta}, \sigma^2 \cdot I_n)$

Ισχύει: $\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{Y} - X \cdot \underset{\sim}{\beta}$
Υπόλοιπα: $\underset{\sim}{e} \overset{\text{ορ}}{=} \underset{\sim}{Y} - \hat{\underset{\sim}{Y}} = \underset{\sim}{Y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}$
$\Bigg\}$ Άρα Υπόλοιπα εκτιμούν τα σφάλματα του μοντέλου

Ιδιότητες των Υπολοίπων

1) Τα υπόλοιπα είναι γραμμικές συναρτήσεις των $\underset{\sim}{\varepsilon}$ κ' $\underset{\sim}{Y}$

$$\underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{Y} - X.\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \underset{\sim}{Y} - X(X'.X)^{-1}.X.\underset{\sim}{Y} = (I_n - X(X'X)^{-1}.X').\underset{\sim}{Y} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\underset{\sim}{e} = (I_n - P).\underset{\sim}{Y} \quad , \text{όπου} \quad P = X(X'X)^{-1}.X'}$$

Άρα το $\underset{\sim}{e}$ γραμμική συνάρτηση του $\underset{\sim}{Y}$

Ιδιότητες του P

α) Ο P συμμετρικός, δηλ. $(P = P^T)$

β) Ο P ταυτοδύναμος, δηλ. $(P^2 = P)$

$$P' = [X.(X'.X)^{-1}.X'] \xrightarrow[(A^{-1})' = (A')^{-1}]{(AB)' = B'.A'} P \text{ , αποδείχθη το (α)}$$

$$P^2 = [X(X'.X)^{-1}.X'].[X(X'.X)^{-1}.X'] =$$

$$= X(X'.X)^{-1}.X'.X(X'X)^{-1}.X' = X(X'.X)^{-1}.X' = P$$

, αποδείχθη το (β).

Απόδειξη γραμ. των υπολοίπων:

Αποδείξαμε ότι $\underset{\sim}{e} = (I_n - P).\underset{\sim}{Y} = (I_n - P).(X\beta + \varepsilon) =$

$$= (I_n - P).\underset{\sim}{\varepsilon} + (I_n - P).X\underset{\sim}{\beta}$$

Αλλά: $(I_n - P).X.\underset{\sim}{\beta} = X.\underset{\sim}{\beta} - P.X.\underset{\sim}{\beta} = X\underset{\sim}{\beta} - X(X'.X)^{-1}X'.X.\underset{\sim}{\beta} =$

$$= X\underset{\sim}{\beta} - X.\underset{\sim}{\beta} = 0$$

$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{e} = (I_n - P).\underset{\sim}{\varepsilon}$

2) $\underset{\sim}{e} \sim N_n(\underset{\sim}{0}, (I_n - P)\sigma^2)$

Επειδή $\underset{\sim}{e}$ γρ. συνδυασμός του $\underset{\sim}{Y}$ ή του $\underset{\sim}{\varepsilon}$ και τα $\underset{\sim}{Y}$ και $\underset{\sim}{\varepsilon}$ είναι normal $\Rightarrow$ $\underset{\sim}{e} \sim$ Normal

$\underset{\sim}{e}\ (I_n - P).\underset{\sim}{\varepsilon}$

$E(\underset{\sim}{e}) = E[(I_n - P).\underset{\sim}{\varepsilon}] = (I_n - P).E(\underset{\sim}{\varepsilon})^{\nearrow 0} = \underset{\sim}{0}$

$Var(\underset{\sim}{e}) = Var[(I_n - P).\underset{\sim}{\varepsilon}] \overset{Var(a.\underset{\sim}{w}) = A.Var(w).A'}{=\!=\!=\!=}$

$= (I_n - P).Var(\underset{\sim}{\varepsilon}).(I_n - P)' = (I_n - P).\sigma^2.I_n(I_n - P) =$

$= \sigma^2(I_n - P)(I_n - P) = \sigma^2.(I_n - P - P + P^2) = \sigma^2.(I_n - P)$

Άμεση συνέπεια: $e_i \sim N(0, (1 - P_{ii})\sigma^2)$, όπου

P_{ii} = i-διαγώνιο στοιχείο του A $\forall i = 1, \ldots, n$

3) Τα διανύσματα $\underset{\sim}{e}$ και $\underset{\sim}{\hat{Y}}$ είναι ασυσχέτιστα, δηλ. $Cov(\underset{\sim}{e}, \underset{\sim}{\hat{Y}}) = 0$

$Cov(\underset{\sim}{e}, \underset{\sim}{\hat{Y}}) = Cov((I_n - P).\underset{\sim}{Y}, X.\underset{\sim}{\hat{\beta}}) = Cov((I_n - P)\underset{\sim}{Y}, X(X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{Y})$

$= Cov((I_n - P)\underset{\sim}{Y}, P\underset{\sim}{Y}) \overset{Cov(a\underset{\sim}{w}, b\underset{\sim}{w}) = A\,Var(\underset{\sim}{w})B'}{=\!=\!=\!=}$

$= (I_n - P).Var(\underset{\sim}{w}).P' = (I_n - P).\sigma^2.I_n.P =$

$= \sigma^2.(I_n - P).P = \sigma^2.(P - P^2) \overset{P = P^2}{=} 0$

4) <u>Μαθηματικοποιημένα Μοντέλο</u>: $t_i = \dfrac{e_i}{\sqrt{MS_{res}}\sqrt{1 - p_{ii}}}$

με p_{ii} το i-διαγώνιο στοιχείο του P, $i=1,\dots,n$

Για τα t_i ισχύει: $t_i \sim t_{n-p-1}$

Απόδειξη: Είναι $e_i \sim N(0, \sigma^2(1-p_{ii}))$, $i=1,\dots,n$

$\Rightarrow \dfrac{e_i}{\sigma^2 \cdot (1-p_{ii})} \sim N(0,1)$. Επίσης $\dfrac{SSres}{\sigma^2} \sim X^2_{n-p-1}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Επιπλέον ξέρω ότι } MSres \text{ ή } SSres \text{ ανεξ. } \hat{\underset{\sim}{\beta}} \\ \text{Ακόμα, } \underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{y}} = \underset{\sim}{y} - x \cdot \hat{\underset{\sim}{\beta}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ MSres ή SSres ανεξ. $\underset{\sim}{e}$

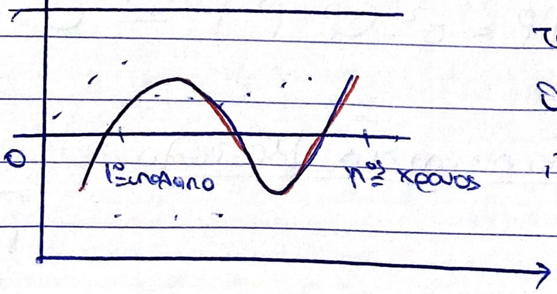
Επομένως: $$t_i = \frac{e_i}{\sqrt{MSres}\sqrt{1-p_{ii}}} = \frac{e_i / \sqrt{1-p_{ii}}}{\sqrt{\frac{SSres}{\sigma^2} / n-p-1}} \overset{d}{=} \frac{N(0,1)}{\sqrt{X^2_{n-p-1} / n-p-1}}$$

$$\sim t_{n-p-1}$$

Αξιοποίηση Υπολοίπων για τον έλεγχο των υποθέσεων για τα σφάλματα

(Ι) Έλεγχος ασυσχέτιστου των σφαλμάτων

(α) Γραφική Παράσταση

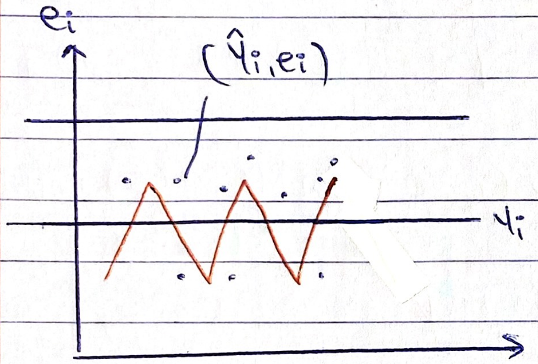


Αν είναι άτακτα κατανεμημένα τότε, ασυσχέτιστα, αν ακολουθούν την "κόκκινη" γραφή, τότε έχουν κάποιο είδος σχέσης (β) Τέστ των ροών

(γ) Τεστ Durbin-Watson

(ΙΙ) Έλεγχος Σταθερής Διακύμανσης σ^2

(α) Γραφική Παράσταση



Από το (3) αν ικανοπ. οι υποθέσεις για τα σφάλματα, άρα και σταθ. διακυμ., τότε $Cov(e_i, \hat{\underline{y}}) = 0$

(β) Τεστ Levene κ.ο.κ

(ΙΙΙ) Υπόθεση Κανονικότητας Σφαλμάτων

Test Kolmogorov-Smirnov

Test Shapiro-Wilks.